

Lista Completa de Conteúdos

Almanaque da Matemática

VOLUME 1 - TÓPICOS BÁSICOS

- Multiplicações e Divisões Longas
- Regras de Divisibilidade
- Números Primos e Fatoração
- Unidades de Medidas: Comprimento, Área, Volume Massa e Tempo
- Transformações de Medidas
- Produtos Notáveis
- Fatoração de Polinômios
- Regra de 3 Direta e Inversa
- Escalas
- Sistema de Equações
- Operações com Frações e Decimais
- Raízes e Operações

VOLUME 2 - CONJUNTOS

- Elementos
- Conjuntos
- Subconjuntos
- Conjuntos Numéricos
- Operações com Conjuntos
- Problemas Envolvendo Conjuntos

VOLUME 3 - FUNÇÕES

- Plano Cartesiano e Gráficos
- Introdução à Funções
- Função do Primeiro Grau
- Equações e Inequações do Primeiro Grau
- Função do Segundo Grau
- Equações e Inequações do Segundo Grau
- Vértice e Raízes da Função do 2º Grau
- Técnica da Soma e Produto
- Fatoração de Trinômios Quadrados
- Função Inversa
- Função Composta
- Modulos e Função Modular

VOLUME 4 - POTÊNCIAS E LOGARITMOS

- Propriedade das Potências
- Função Exponencial
- Propriedade dos Logaritmos
- Função Logarítmica
- Equações Logarítmicas
- Logaritmo Natural

VOLUME 5 - GEOMETRIA PLANA

- Ângulos
- Triângulos
- Semelhança de Triângulos
- Teorema de Pitágoras
- Área de Triângulos
- Quadriláteros (Quadrado, Retângulo, Paralelogramo, Losango e Trapézio)
- Círculo e Polígonos
- Ângulo Interno e Central

VOLUME 6 - GEOMETRIA ESPACIAL

- Cubo
- Paralelepípedo
- Prismas
- Pirâmides
- Cilindro
- Cone
- Troncos de Pirâmide
- Esfera
- Poliedros
- Poliedros de Platão

VOLUME 7 - TRIGONOMETRIA

- Graus e Radianos
- Ciclo Trigonométrico
- Trigonometria no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente
- Lei dos Senos e Lei dos Cossenos
- Funções Trigonométricas (Função Seno, Função Cosseno e Função Tangente)
- Relação Fundamental da Trigonometria
- Transformações Trigonométricas: Arco Soma, Diferença e Arco Duplo)

VOLUME 8 - PROGRESSÕES E SEQUÊNCIAS

- Progressão Aritmética
- Termo Geral de uma PA
- Termo Médio de uma PA
- Soma dos Termos de uma PA
- Progressão Geométrica
- Termo Geral de uma PG
- Termo Médio de uma PG
- Soma dos Termos de uma PG
- Sequência de Fibonacci
- Lei de Formação de Sequências

VOLUME 9 - ESTATÍSTICA E FINANCEIRO

- Média
- Moda
- Mediana
- Desvio Médio
- Variância e Desvio Padrão
- Porcentagem,
- Aumento e Desconto
- Juros Simples
- Juros Compostos

VOLUME 10 - ANÁLISE COMBINATÓRIA

- Fatorial
- Princípio Fundamental da Contagem
- Combinação (Com Termos Repetidos e Não Repetidos)
- Arranjo (Com Termos Repetidos e Não Repetidos)
- Permutação (Com Termos Repetidos e Não Repetidos)
- Probabilidade Simples
- Probabilidade Composta

VOLUME 11 - MATRIZES E DETERMINANTES

- Matrizes
- Classificações de Matrizes
- Matrizes Opostas, Unitárias, Iguais e Simétricas
- Operações com Matrizes
- Lei de Formação de Matrizes
- Determinantes
- Propriedades das Determinantes
- Cofatores
- Regra de Laplace

VOLUME 12 - GEOMETRIA ANALÍTICA

- Ponto
- Distância entre Pontos
- Equações da Reta
- Equação de Retas Paralelas e Perpendiculares
- Distâncias entre Retas
- Equação da Circunferência
- Equação da Elipse

VOLUME 13 - NÚMEROS COMPLEXOS

- Número Imaginário
- Padrões de Potências
- Operações com Números Complexos
- Conjugado de um Número Complexo
- Divisão de Números Complexos
- Forma Trigonométrica do Número Complexo

VOLUME 14 - TÓPICOS ESPECIAIS

- Triângulo de Pascal

**Veja uma amostra
do material na
página seguinte**

ALMANAQUE DA MATEMÁTICA

Márcio Azulay



Volume 3: **Funções**

Parte F: **Vértice da Parábola**



Sumário

04 Vértice

09 Problemas

18 Demonstração das Fórmulas

Almanaque da Matemática
Volume 3 - Funções
Parte F - Vértice da Parábola
Edição 6.3 • 2026

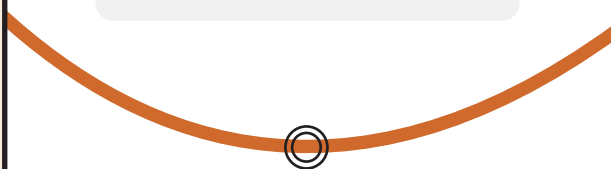
Escrito e Ilustrado por Márcio Azulay

Este material não pode ser
compartilhado, vendido ou editado
sem a autorização do autor.

VÉRTICE

Toda parábola tem um ponto que manda no gráfico inteiro

É o ponto onde ela para de descer e começa a subir...



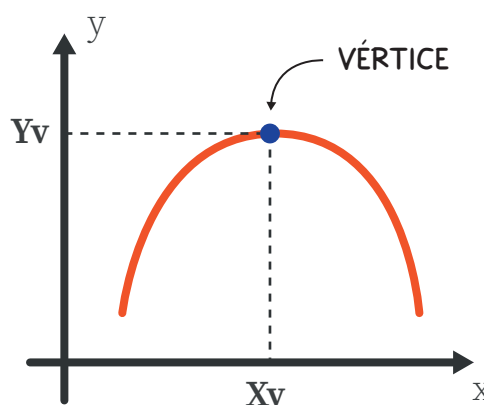
...ou para de subir e começa a descer.



Esse ponto é o vértice.

E ele responde as duas perguntas que caem muito em provas:

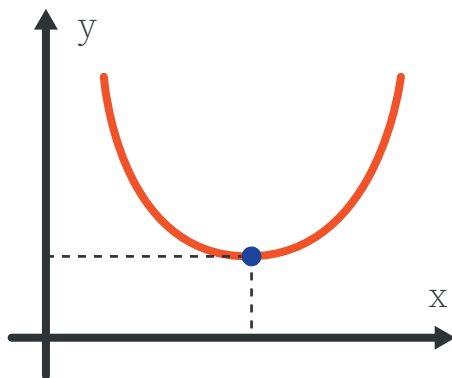
Qual o valor máximo?
Ou qual o valor mínimo?



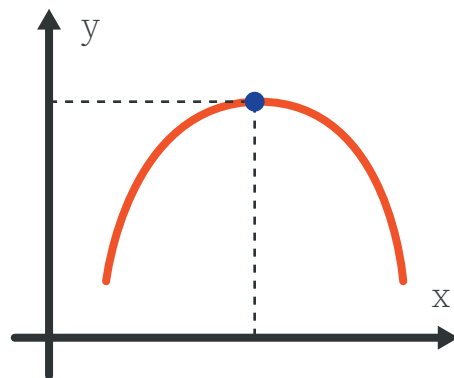
O sinal do coeficiente "a" decide isso sozinho.
Antes de qualquer conta, olhe para ele.

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Se $a > 0$, a parábola abre para cima.
O vértice é o ponto mais baixo. Chamamos de PONTO MÍNIMO.



Se $a < 0$, ela abre para baixo.
O vértice é o ponto mais alto. Chamamos de PONTO MÁXIMO.

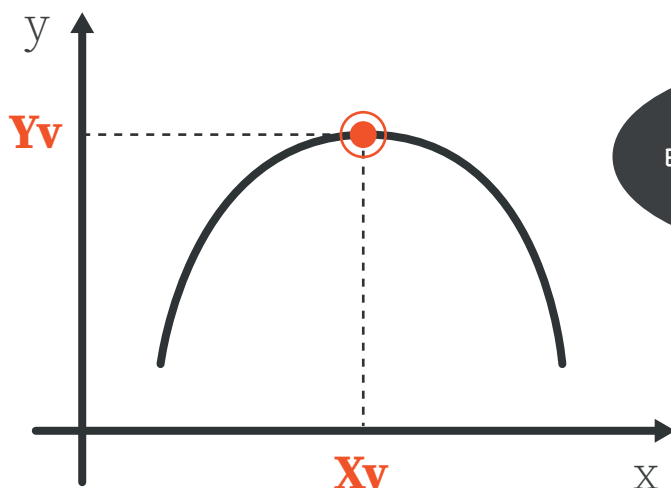


A coordenada horizontal é o " X_v " (x do vértice) e pode ser achada pela fórmula:

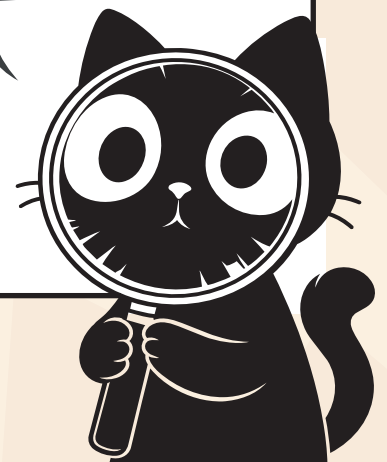
$$X_v = \frac{-b}{2a}$$

A coordenada vertical é o " Y_v " (y do vértice) e pode ser achada pela fórmula:

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$



VAMOS DEMONSTRAR
ESSAS FÓRMULAS NO FINAL
DESSE ALMANAQUE



Resolvido

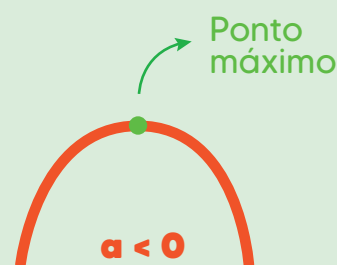
Determine se as funções a seguir possuem um ponto máximo ou mínimo:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

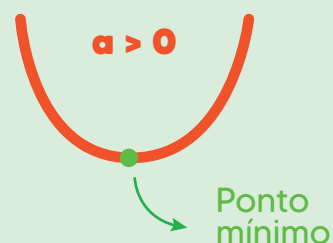
b) $f(x) = 5x - x^2$

RESOLUÇÃO

O ponto máximo é como é chamado o vértice de uma parábola que possui concavidade voltada para baixo, e isso acontece quando o valor da constante “a” é negativa:



O ponto mínimo é como é chamado o vértice de uma parábola que possui concavidade voltada para cima, e isso acontece quando o valor da constante “a” é positiva:

a) Ponto Mínimo, pois $a = 2$ b) Ponto Máximo, pois $a = -1$

01 Determine se as funções a seguir possuem um ponto máximo ou mínimo:

a) $f(x) = 3x^2 + 6 + 2x$

c) $f(x) = x^2 + x$

b) $f(x) = 9 - x^2$

d) $f(x) = -4x^2 + 3x$

Resolvido

Determine as coordenadas do vértice da função quadrática:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

RESOLUÇÃO

Coordenada 'x' do vértice (X_v):

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2}$$

Coordenada 'y' do vértice (Y_v):

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$Y_v = \frac{-((-3)^2 - 4(1)(2))}{4(1)} = \frac{-(9 - 8)}{4} = \frac{-1}{4}$$

02 Determine as coordenadas do vértice das funções abaixo:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 15$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

d) $f(x) = 3x^2 + 6 + 2x$

e) $f(x) = 9 - x^2$

f) $f(x) = x^2 + x$

g) $f(x) = -4x^2 + 3x$

01

- a) Ponto Mínimo ($a = 3$)
- b) Ponto Máximo ($a = -1$)
- c) Ponto Mínimo ($a = 1$)
- d) Ponto Máximo ($a = -4$)

02

$$\begin{aligned} \text{a) } X_V &= \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = 1 \\ Y_V &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-64}{4(-1)} = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } X_V &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2 \\ Y_V &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{0}{4(1)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } X_V &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2(-1)} = 2 \\ Y_V &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-4)}{4(-1)} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } X_V &= \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(3)} = \frac{-1}{3} \\ Y_V &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-68)}{4(3)} = \frac{17}{3} \end{aligned}$$

$$\text{e) } X_V = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-1)} = 0$$

$$Y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4(-1)} = 9$$

$$\text{f) } X_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(1)} = \frac{-1}{2}$$

$$Y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4(1)} = \frac{-1}{4}$$

$$\text{g) } X_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-4)} = \frac{3}{8}$$

$$Y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-9}{4(-4)} = \frac{9}{16}$$

PROBLEMAS

Imagine que temos o lucro (L) de uma empresa sendo modelado por uma função do segundo grau que depende da quantidade (q) de produtos produzidos.

$$L = a \cdot q^2 + b \cdot q + c$$

Quando se pergunta:

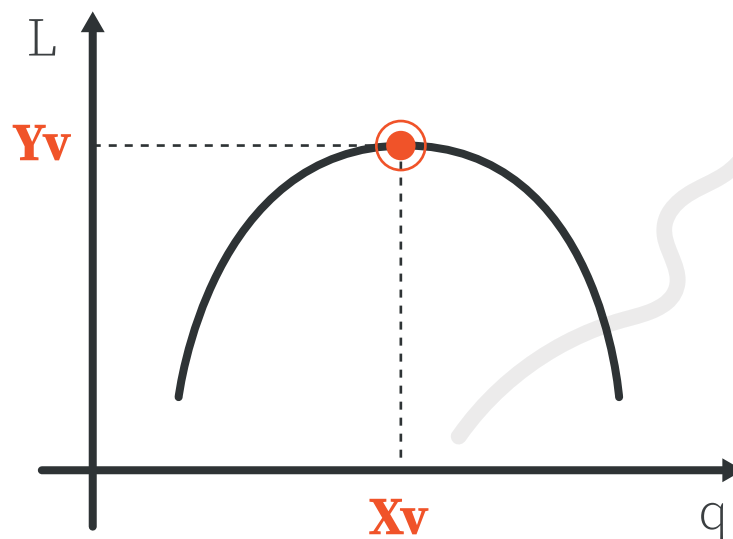
Qual é o lucro máximo dessa empresa?

Estamos falando do Y_v

Quando se pergunta:

Qual foi a quantidade produzida para alcançar lucro máximo?

Estamos falando do X_v



Resolvido • Altura

Um menino chuta uma bola que faz uma trajetória parabólica cuja função da altura “H” (em metros) é igual a $H(t) = 6t - 5t^2$, onde “t” é o tempo (em segundos). Determine:

- a) A altura máxima alcançada pela bola
- b) O instante em que ela alcança a altura máxima

RESOLUÇÃO

- a) A altura máxima ($H_{\max}$) pode ser achada pelo Y do vértice (Y_v):

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(36)}{4(-5)} = 1,8 \text{ m}$$

- b) O instante em que a bola alcança a altura máxima é o “X” do vértice (X_v):

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6)}{2(-5)} = 0,6 \text{ s}$$

01 Um menino chuta uma bola que faz uma parábola cuja função da altura “H” é igual a $H(t) = 9t - 5t^2$, onde “t” é o tempo (em segundos). Determine:

- a) A altura máxima alcançada pela bola
- b) O instante em que ela alcança a altura máxima

02 O lucro (L) de uma empresa é definido pela quantidade de unidades (u) vendidas por ela de acordo com a função:

$L(u) = -4u^2 + 240u - 380$. Determine:

- a) O Lucro máximo que essa empresa pode ter
- b) A quantidade de unidades vendidas para ter o lucro máximo.

Resolvido • Lucro Máximo com Desconto

Uma empresa vende um produto por R\$ 20 a unidade e vende em torno de 100 unidades por dia nesse valor.

Após alguns testes, o dono da empresa percebeu que para cada 1 real de desconto, sua loja vendia 15 unidades a mais.

A partir dessas informações, determine:

- a) A função que descreve a receita dessa empresa em função do desconto.
- b) A receita máxima que essa empresa pode ter.
- c) O desconto máximo que ela deve fornecer.
- d) O preço ideal desse produto para a receita máxima.

RESOLUÇÃO

a) A receita (R) de uma empresa é achada pelo produto entre a quantidade de produtos vendidos (Q) e o preço de cada unidade (P):

$$R = Q \cdot P$$

Mas lembre-se que será dado um desconto, e isso vai alterar no preço de cada produto e também na quantidade vendida.

A quantidade (Q) vendida será de 100 unidades mais 15 unidades para cada “x” reais de desconto:

$$Q = 100 + 15x$$

O preço unitário (P) será de R\$ 20 menos o desconto “x”:

$$P = 20 - 1x$$

Substitua cada expressão na função da Receita (R):

$$R = Q \cdot P$$

$$R = (100 + 15x) \cdot (20 - x)$$

$$R = 2000 - 100x + 300x - 15x^2$$

$$R = -15x^2 + 200x + 2000$$

Aplique a propriedade distributiva

Reorganize os termos e some $-100x + 300x$

b) Para achar a receita máxima, use a fórmula do Y_v :

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(5200)}{4(-15)} = \text{R\$ } 2666,67$$

c) Use a fórmula do X_v para achar o desconto que maximiza a receita:

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(200)}{2(-15)} = \text{R\$ } 6,67$$

d) Se o desconto é de R\$ 6,67, o preço de venda deve ser igual a R\$ 13,33 para alcançar a receita máxima.

03 Uma empresa vende um produto por R\$ 18 a unidade e vende em torno de 120 unidades por dia nesse valor.

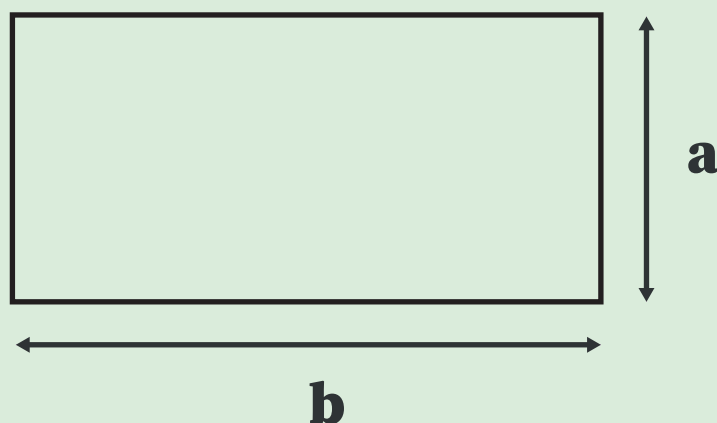
Após alguns testes, o dono da empresa percebeu que para cada 0,20 reais de desconto, sua loja vendia 10 unidades a mais.

A partir dessas informações, determine:

- a) A função que descreve a receita dessa empresa em função do desconto.
- b) A receita máxima que essa empresa pode ter.
- c) O desconto que deve ser fornecido para maximizar a receita.
- d) O preço ideal desse produto para a receita máxima.

Resolvido • Área do Terreno

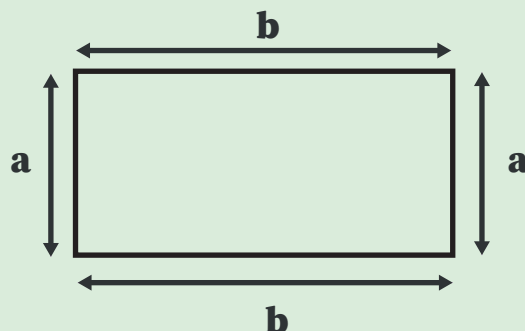
O dono de um terreno possui 600 metros de arame para cercar a área destinada a uma horta em formato retangular como mostra a figura ao lado:



Determine o comprimento (b) e a largura (a) desse terreno de forma que a área da horta seja a maior possível.

RESOLUÇÃO

Sabemos que o perímetro (soma de todos os 4 lados) desse terreno é de 600m:



$$2a + 2b = 600$$

$$a + b = 300$$

$$a = 300 - b$$

Divida tudo por 2

E a área (A) desse terreno é o produto dessas duas dimensões “a” e “b”:

$$A = a \cdot b$$

Substitua a expressão ($a = 300 - b$) na fórmula da área:

$$A = a \cdot b$$

$$A = (300 - b) \cdot b$$

$$A = 300b - b^2$$

Para achar a área máxima usaremos o “Yv”, mas para achar o lado “b”, vamos usar o “Xv”:

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(300)}{2(-1)} = 150 \text{ m}$$

Substitua o valor de “b” achado na equação de “a”:

$$a = 300 - b$$

$$a = 300 - 150$$

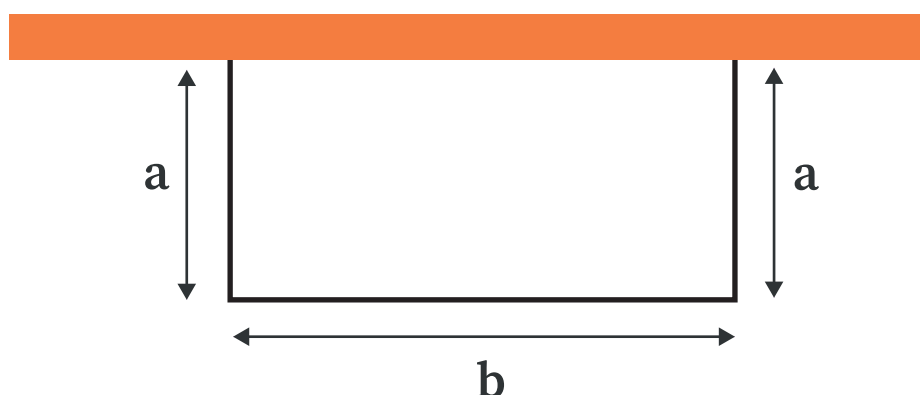
$$a = 150 \text{ m}$$

Os lados devem ser iguais a 150 metros, ou seja, o terreno é um quadrado.

04 O dono de um terreno possui 800 metros de arame para cercar a área destinada a uma horta em formato retangular.

Determine a área máxima que esse terreno pode ter e os comprimentos dos lados.

05 O dono de um terreno possui 90 metros de arame para cercar a área destinada a uma horta em formato retangular contra um muro de tijolos como mostra a figura a seguir:



Determine a área máxima que esse terreno pode ter e os comprimentos dos lados.

01

$$\text{a) } H = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-81}{4(-5)} = 4,05 \text{ m}$$

$$\text{b) } t = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{2(-5)} = 0,9 \text{ s}$$

02

$$\text{a) } L = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-51520}{4(-4)} = 3220 \text{ R\$}$$

$$\text{b) } u = \frac{-b}{2a} = \frac{-240}{2(-4)} = 30 \text{ unid.}$$

03

$$\text{a) } R = (\text{Quant.}) \cdot (\text{Preço Unit.})$$

$$R = (120 + 10x) \cdot (18 - 0,2x)$$

$$R = 2160 - 24x + 180x - 2x^2$$

$$R = -2x^2 + 156x + 2160$$

$$\text{b) } R_{\text{MAX}} = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$R_{\text{MAX}} = \frac{-41616}{4(-2)} = 5202 \text{ reais}$$

$$\text{c) } X_{\text{MAX}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(156)}{2(-2)} = 39 \text{ reduções de R\$0,20}$$

$$39 \times (\text{R\$ } 0,20) = \text{R\$ } 7,80$$

$$\text{d) } 18 - 7,8 = \text{R\$ } 10,20$$

04 $2a + 2b = 800$ $A = a \cdot b$
 $a + b = 400$ $A = a \cdot (400 - a)$
 $b = 400 - a$ $A = 400a - a^2$

$$A_{MAX} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-160000}{4(-1)} = 40.000 \text{ m}^2$$

$$X_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{2(-1)} = 200 \text{ m}$$

$$A_{MAX} = 40.000 \text{ m}^2$$

$$a = b = 200 \text{ m}$$

05 $2a + b = 90$ $A = a \cdot b$
 $b = 90 - 2a$ $A = a \cdot (90 - 2a)$
 $A = 90a - 2a^2$

$$A_{MAX} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-8100}{4(-2)} = 1012,5 \text{ m}^2$$

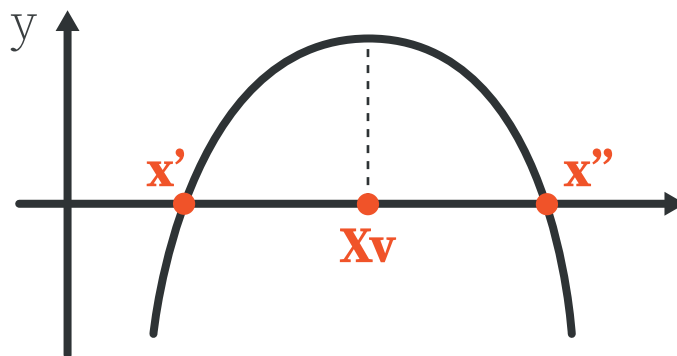
$$X_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{2(-2)} = 22,5 \text{ m}$$

$$A_{MAX} = 1012,5 \text{ m}^2$$

$$a = 22,5 \text{ m} ; b = 45 \text{ m}$$

DEMONSTRAÇÃO DAS FÓRMULAS DAS COORDENADAS DO VÉRTICE

A posição do X_v é o PONTO MÉDIO entre as duas raízes x' e x''



Isso significa que ele é a média aritmética entre as duas raízes.

Usamos a relação:

$$X_v = \frac{x' + x''}{2}$$

As duas raízes são encontradas utilizando Bhaskara

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Substitua esses valores na equação da média:

$$X_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{\frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} + \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

E para encontrar Y_v , basta substituir X_v na função geral do segundo grau.

$$Y_v = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$Y_v = a \cdot \left(\frac{-b}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a} \right) + c$$

$$Y_v = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b \cdot \frac{-b}{2a} + c$$

$$Y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

Some as frações

$$Y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$Y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$Y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Bote o sinal negativo em evidência

$$Y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$Y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

A expressão dentro do parêntesis é o delta (Δ)

$$Y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

ALMANAQUE DA MATEMÁTICA

MARCIO
AZULAY
EXATAS