

Lista Completa de Conteúdos

Almanaque do Cálculo 1

VOLUME 1 - LIMITES

- Introdução aos Limites,
- Vizinhança
- Limites Laterais
- Limites Infinitos
- Propriedades dos Limites
- Tipos de Descontinuidade
- Técnicas de Resolução de Limites: Substituição Direta, Fatoração e Conjugado
- Limites Fundamentais
- Introdução às Derivadas
- Inclinação da Reta Secante e Reta Tangente

VOLUME 2 - DERIVADAS

- Introdução às Derivadas e Notações
- Derivadas de Potências:
- Casos com Expoentes Inteiros, Negativos, Fracionários, Unitário e Constantes
- Derivadas Trigonométricas
- Derivadas de Funções Exponenciais
- Derivadas de Funções Logarítmicas
- Propriedades das Derivadas: Regra da Soma Produto, Razão e Regra da Cadeia
- Análise Geométrica
- Equação da Reta Tangente
- Vértices
- Pontos de Inflexão

VOLUME 3 - INTEGRAIS

- Introdução às Integrais
- Áreas e Soma de Riemann
- Antiderivadas
- Integração por Substituição
- Integração por Partes
- Integração por Frações Parciais
- Área entre Funções

**Veja uma amostra
do material na
página seguinte**

1A

Márcio Azulay

ALMANAQUE DO CÁLCULO



VOLUME 1 • LIMITES

PARTE A • INTRODUÇÃO AOS
LIMITES E AO INFINITO



SUMÁRIO ∞

04 Introdução aos Limites

09 Vizinhança

12 Limites Laterais

13 Limites Infinitos

Almanaque do Cálculo

Escrito e Ilustrado por Márcio Azulay

Capítulo 1 - Limites

Parte A - Introdução aos Limites e ao Infinito

Edição 2 - 2025

Este material não pode ser
compartilhado, vendido ou editado
sem a autorização do autor.

**MARCIO
AZULAY**
EXATAS

Introdução aos Limites

Veja a função
"f" a seguir

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

**MARCIO
AZULAY
EXATAS**

www.marcioazulayexatas.com

E a partir dela
vamos fazer um
breve experimento:

O que será que
acontece quando
o valor de $x = 2$?

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{(2)^2 - 5(2) + 6}{(2) - 2}$$

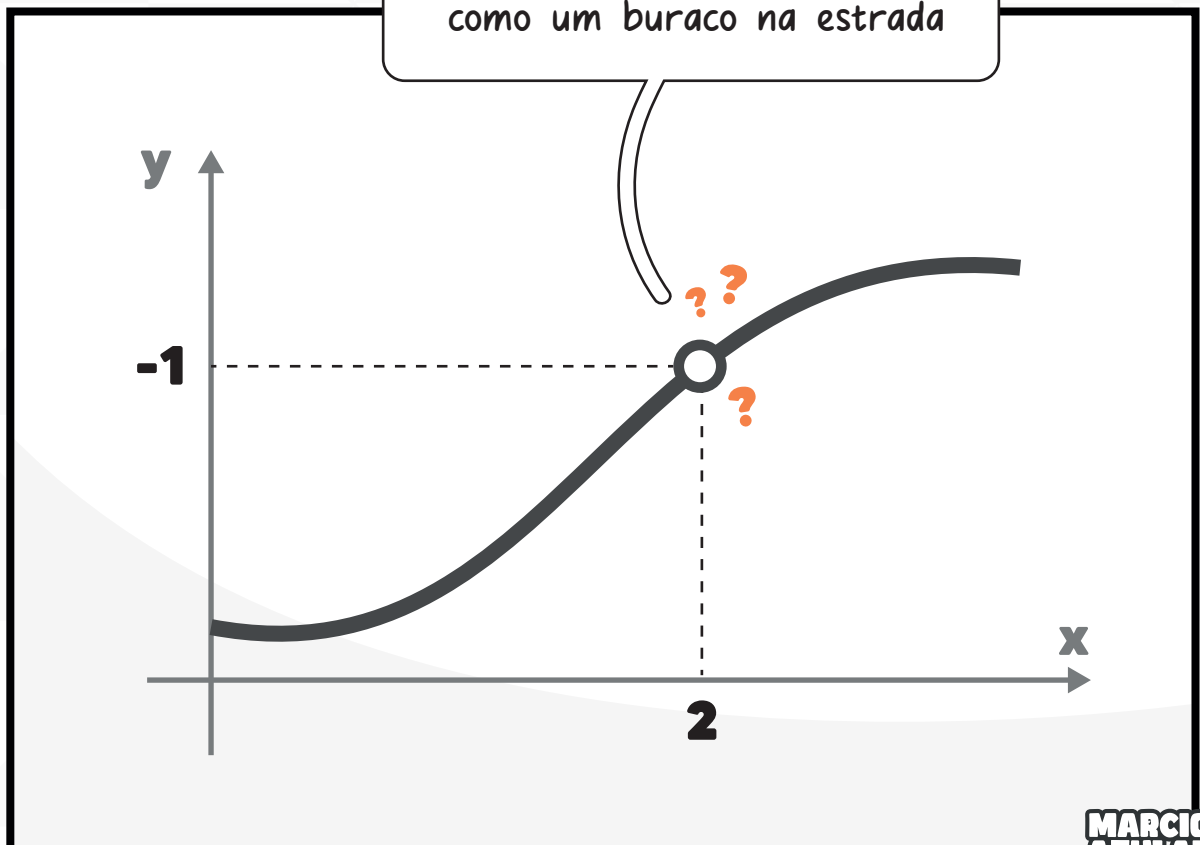
$$f(x) = \frac{4 - 10 + 6}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Uma indeterminação
aparece: a divisão
de zero por zero!

Então o que está acontecendo nesse ponto?

Ao desenhar o gráfico, obtemos uma curva que parece bem comum no início, mas na verdade guarda um segredo

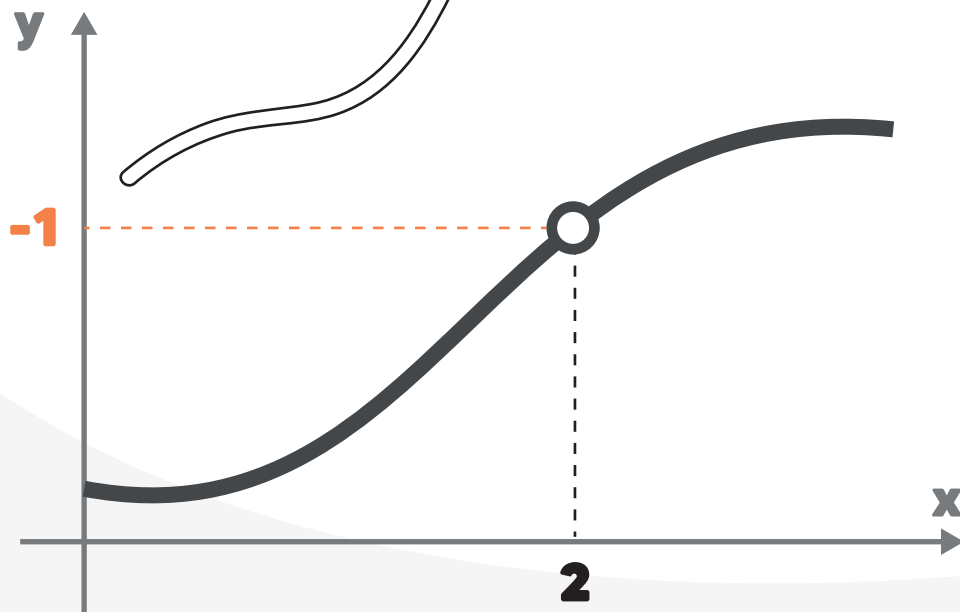
Existe uma quebra, um único ponto faltando, como um buraco na estrada



MARCIO
AZULAY
EXATAS

Aquele único ponto pode ser indeterminado, mas a resposta está na sua vizinhança

Facilmente percebemos pelo gráfico que o valor da função se aproxima de -1 mesmo sendo um ponto em aberto



MARCIO
AZULAY
EXATAS

Em casos como esse,
dizemos que o LIMITE
da função é -1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

E isso acontece
a medida que x tende
ou se aproxima de 2

Respondido

Veja o limite abaixo e escreva, por extenso, como deve ser pronunciada a expressão:

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 2) = 23$$

MARCIO
AZULAY
EXATAS

Solução

“O limite da função $(x^2 - 2)$ é igual a 23, quando x tende a 5.”

Tradução: A medida que x se aproxima de 5 por qualquer lado, o valor da função se aproxima de 23

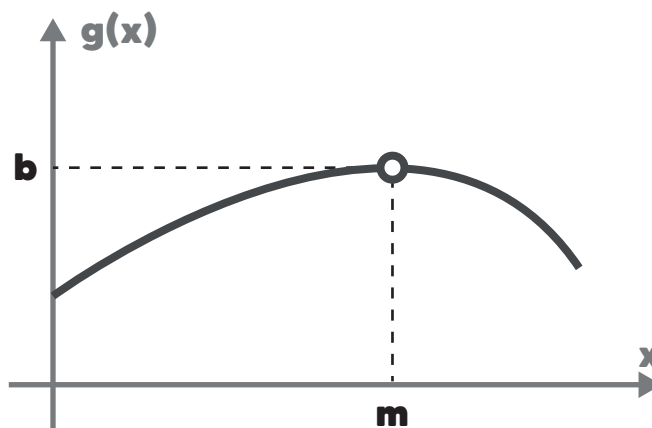
01. Veja os limites abaixo e escreva, por extenso, como devem ser pronunciadas as expressões:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 7) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{|x|} = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

02. Veja o gráfico ao lado e escreva corretamente o limite que representa quando nos aproximamos do ponto $x = m$



01.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 7) = -1$

“O limite da função $(2x - 7)$ é igual a **-1**, quando x tende a **3**.”

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{|x|} = \infty$

“O limite da função $\frac{2}{|x|}$ é igual a **infinito**, quando x tende a **0**.”

↪ “2 dividido pelo módulo de x ”

c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

“O limite da função $f(x)$ é igual a **L**, quando x tende a **a**.”

02.

$\lim_{x \rightarrow m} g(x) = b$

Vizinhança

Vamos voltar ao problema proposto no capítulo passado, uma situação em que "x" pode ser substituído por QUALQUER valor real, mas com uma única exceção.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

MARCIO
AZULAY
EXATAS

Quando "x" adquire o valor "2", a função acaba zerando no numerador e denominador ao mesmo tempo, isso resulta no que chamamos de indeterminação.

$$f(2) = \frac{(2)^2 - 5(2) + 6}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Como a substituição direta está fora de questão, podemos tentar olhar em sua vizinhança, com valores muito próximos de 2, como 1,9999 ou até 2,0001:



Com a ajuda da calculadora, substituiremos x por 1,9999, um valor menor e muito próximo de 2:

$$f(1,9999) = \frac{(1,9999)^2 - 5(1,9999) + 6}{1,9999 - 2} = -1,0001$$

Tentaremos também outro valor próximo, porém maior do que 2: 2,0001

$$f(2,0001) = \frac{(2,0001)^2 - 5(2,0001) + 6}{2,0001 - 2} = -0,9999$$

**MARCIO
AZULAY
EXATAS**

Nas duas situações podemos ver que os resultados estão se aproximando do número "-1", logo, esse é o valor do limite.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1$$

01. Com a ajuda de uma calculadora científica ou a do seu celular, estime os valores dos limites a seguir:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$

01.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$

Pela esquerda

$$f(4,999) = 7,999$$

Pela direita

$$f(5,001) = 8,001$$

} Os valores convergem para 8

b) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

Pela esquerda

$$f(-0,001) = 0,999$$

Pela direita

$$f(0,001) = 0,999$$

} Os valores convergem para 1

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$

Pela esquerda

$$f(-0,001) = 0,250$$

Pela direita

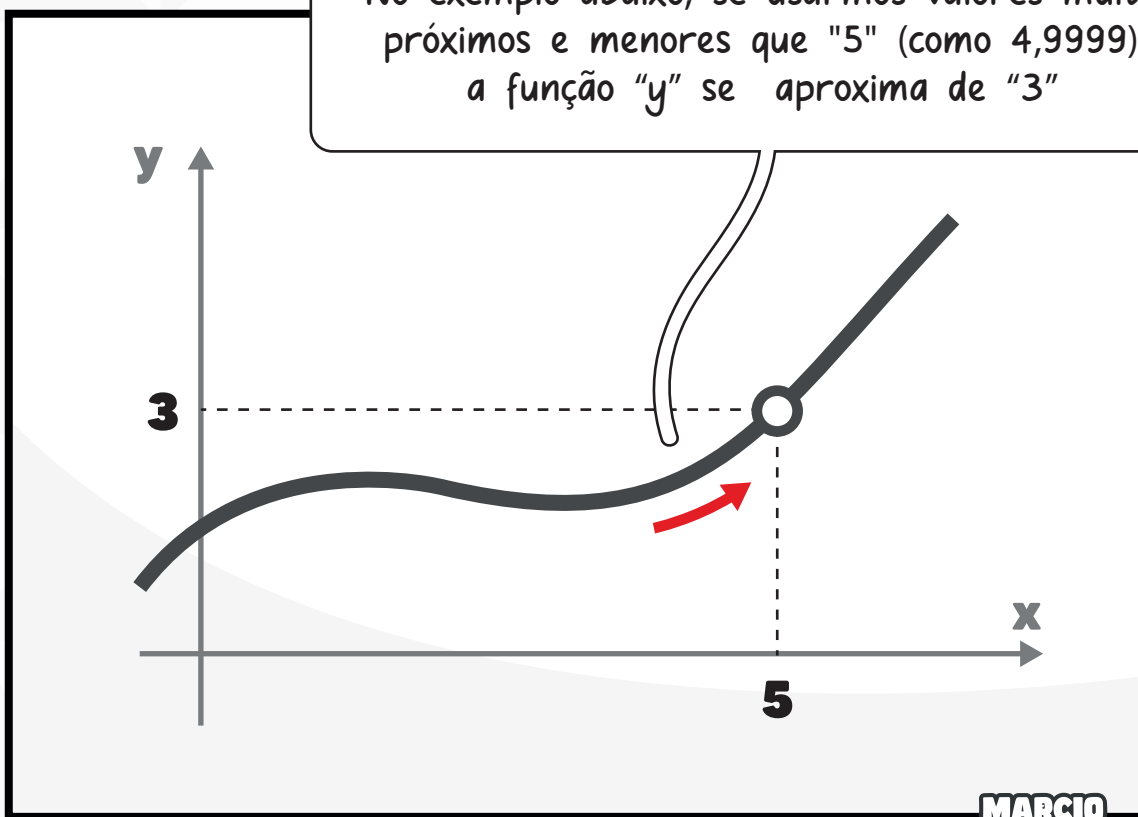
$$f(0,001) = 0,249$$

} Os valores convergem para 0,25

Limites Laterais

Algumas funções possuirão valores iguais quando x se aproxima de um certo valor pela esquerda ou pela direita

No exemplo abaixo, se usarmos valores muito próximos e menores que "5" (como 4,9999) a função " y " se aproxima de "3"



www.marcioazulayexatas.com

**MARCIO
AZULAY
EXATAS**

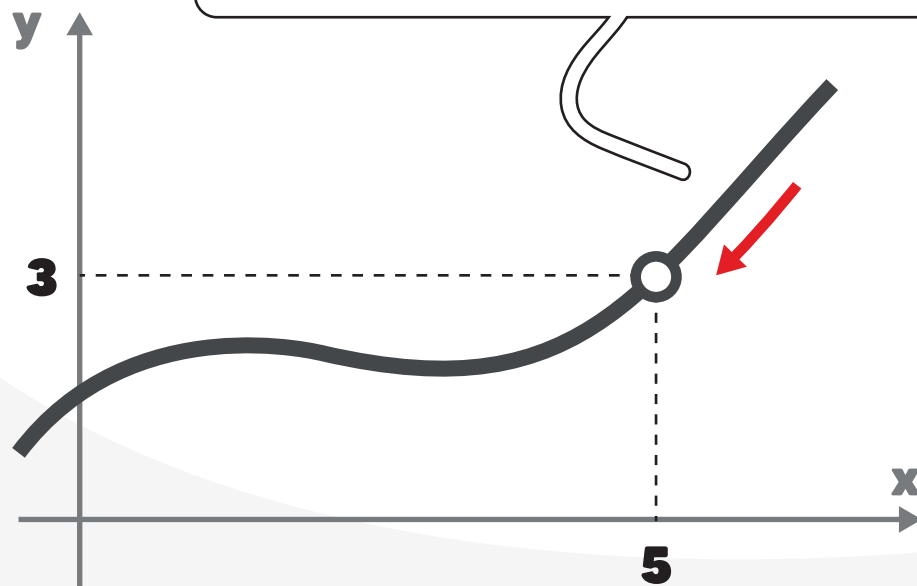
É dito que o LIMITE LATERAL ESQUERDO é "3"

Usamos um sinal de negativo no canto superior do número, para expressar essa ideia

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3$$

MARCIO
AZULAY
EXATAS

E se você se aproximar pela direita, usando valores maiores e muito próximos de 5 (como 5,00001), o valor do limite também irá convergir para "3"



O LIMITE LATERAL DIREITO também é "3"

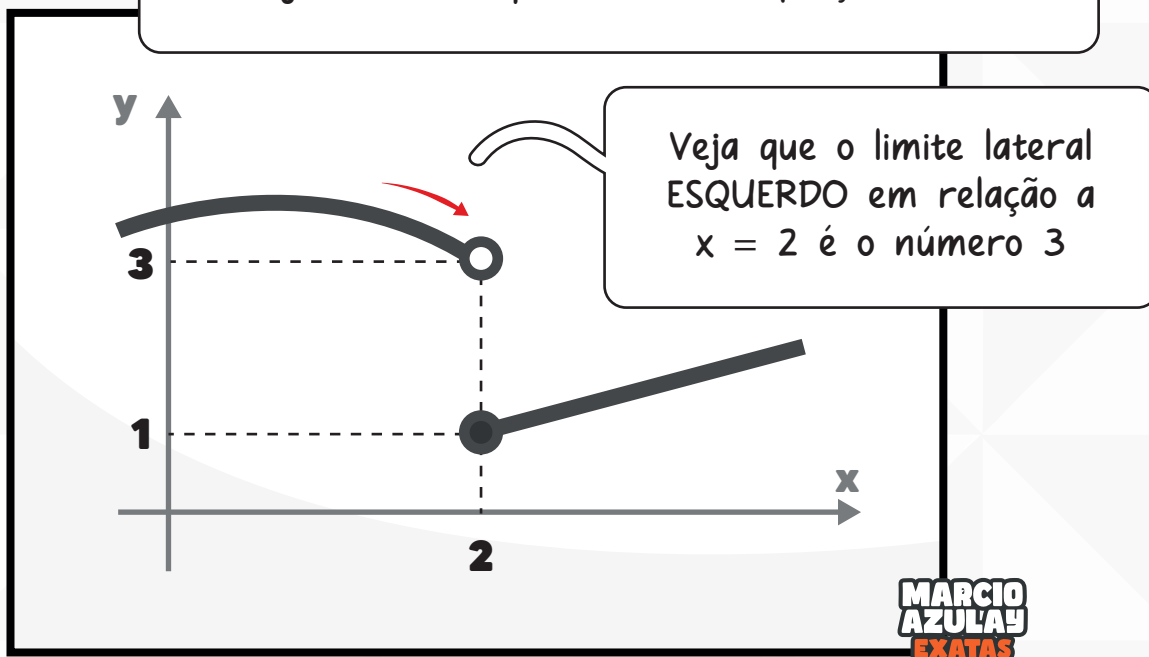
Usamos o sinal positivo no canto superior para expressar essa ideia

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3$$

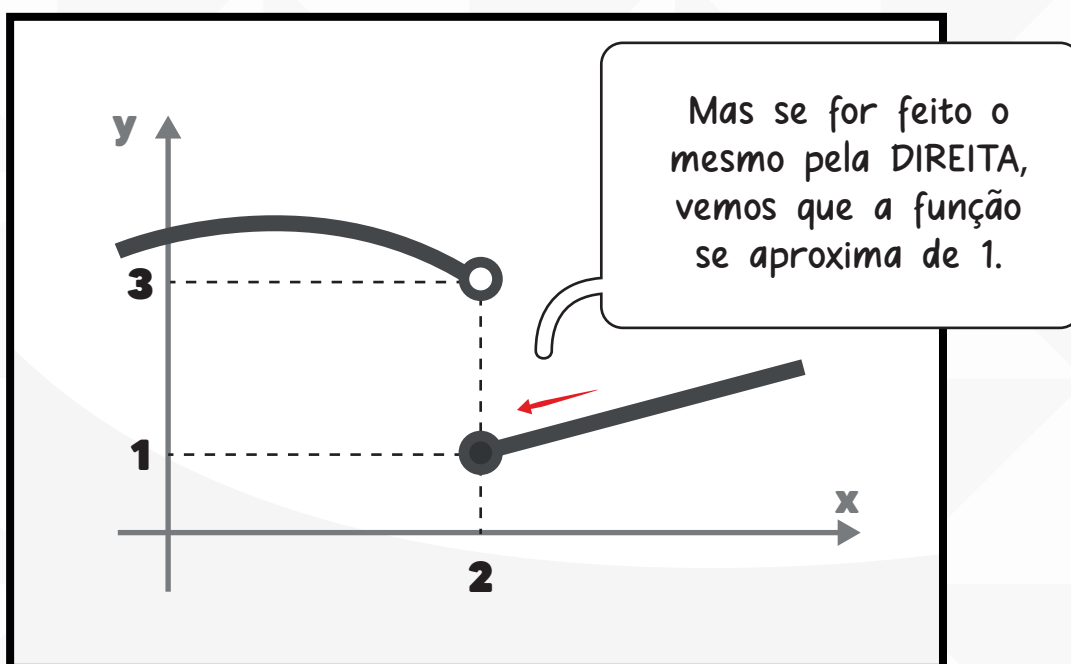
Resumindo, se os limites laterais são iguais então o limite geral EXISTE!

$$\lim_{x \rightarrow a^-} = \lim_{x \rightarrow a^+}$$

Isso já muda completamente na função abaixo...



www.marcioazulayexatas.com



Quando os limites laterais são diferentes, ou um dos lados não existe, então o limite lateral NÃO EXISTE

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \neq \lim_{x \rightarrow a^+}$$

Respondido

Encontre os limites laterais da função ao lado, o limite geral existe ou não existe?

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x - 5|}{x - 5}$$

Solução

Esquerda: Vamos substituir x por um valor muito próximo e inferior a 5. Por exemplo: 4,99.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x - 5|}{x - 5} = \frac{|4,99 - 5|}{4,99 - 5} = \frac{+0,01}{-0,01} = -1$$

Direita: Vamos substituir x por um valor muito próximo e superior a 5. Por exemplo: 5,01.

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x - 5|}{x - 5} = \frac{|5,01 - 5|}{5,01 - 5} = \frac{+0,01}{+0,01} = +1$$

MARCIO
AZULAY
EXATAS

O limite geral **não existe**, pois os limites laterais são diferentes.

01. Encontre os limites laterais das funções abaixo, o limite geral existe ou não existe?

a) $\lim_{x \rightarrow 5} 4x - 3$

b) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{|x + 6|}{x + 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot |2x|}{2x}$

Respondido

Veja a função ao lado:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{quando } x \leq 3 \\ 2 + 4x & \text{quando } 3 < x \leq 5 \\ x^2 - 3 & \text{quando } x > 5 \end{cases}$$

- a) Determine os limites laterais quando x tende a 3, o limite geral existe nesse ponto?
- b) Determine os limites laterais quando x tende a 5, o limite geral existe nesse ponto?

Solução

a) Perceba que o ponto " $x = 3$ " é o número que separa a primeira e a segunda parte da função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{quando } x \leq 3 \\ 2 + 4x & \text{quando } 3 < x \leq 5 \\ x^2 - 3 & \text{quando } x > 5 \end{cases}$$

A primeira parte da função " $3x - 4$ " descreve os valores laterais de 3 pela esquerda:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} = 3x - 4 = 3(3) - 4 = 5$$

A segunda parte da função " $2 + 4x$ " descreve os valores laterais de 3 pela direita:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} = 2 + 4x = 2 + 4(3) = 14$$

Como os limites laterais são diferentes,
o LIMITE GERAL NÃO EXISTE.

b) O ponto “ $x = 5$ ” é o número que separa a segunda e a terceira parte da função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{quando } x \leq 3 \\ 2 + 4x & \text{quando } 3 < x \leq 5 \\ x^2 - 3 & \text{quando } x > 5 \end{cases}$$

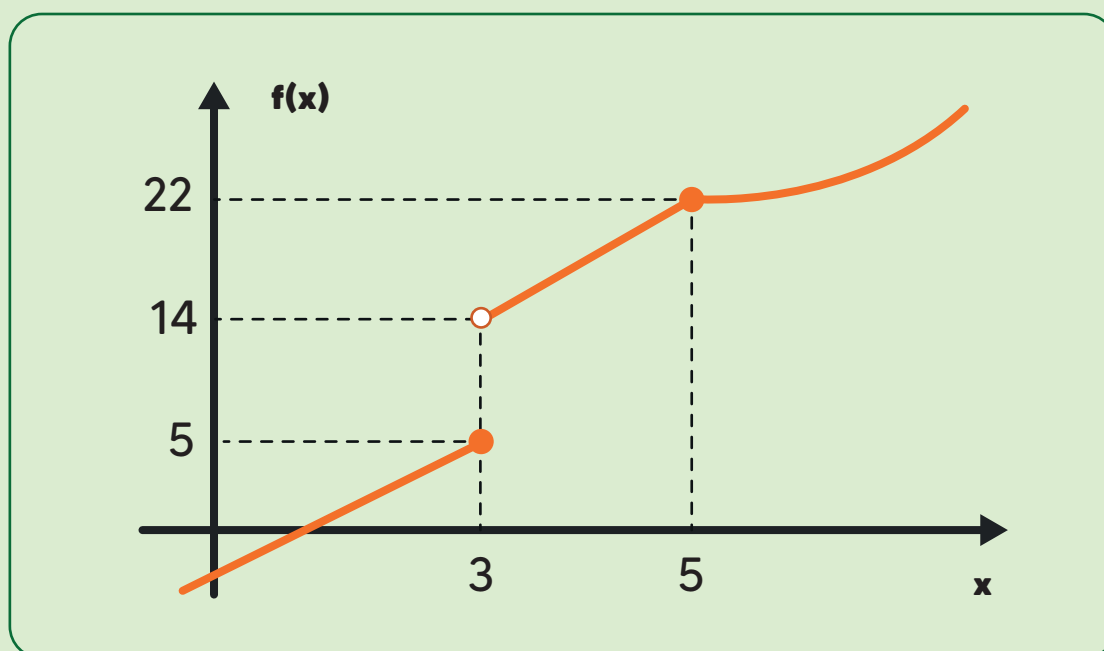
A segunda parte da função “ $2 + 4x$ ” descreve os valores laterais de 5 pela esquerda:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} = 2 + 4x = 2 + 4(5) = 22$$

A segunda parte da função “ $x^2 - 3$ ” descreve os valores laterais de 5 pela direita:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} = x^2 - 3 = (5)^2 - 3 = 22$$

Como os limites laterais iguais,
o LIMITE GERAL EXISTE e é igual a 22.



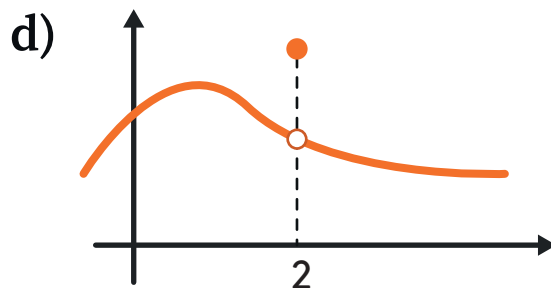
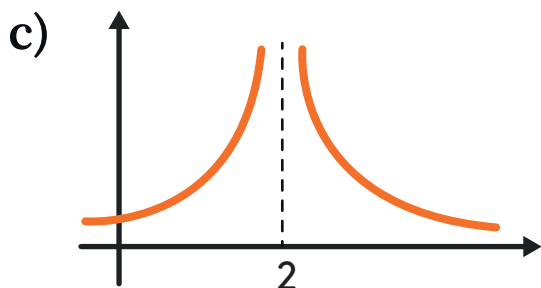
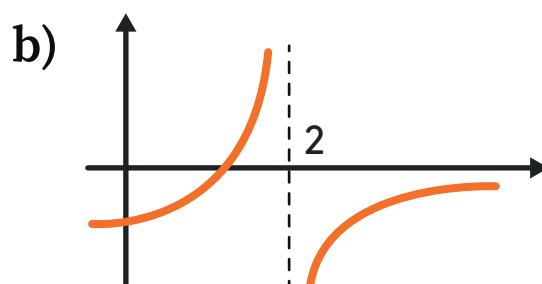
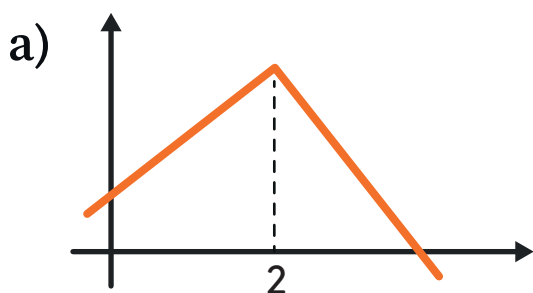
Veja ao gráfico da função $f(x)$, perceba que o limite não existe quando “ $x = 3$ ” e existe quando “ $x = 5$ ”

02. Veja a função abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{quando } x \leq -1 \\ 10 + 5x & \text{quando } -1 < x \leq 1 \\ 15x & \text{quando } x > 1 \end{cases}$$

- a) Determine os limites laterais quando $x = -1$,
o limite geral existe nesse ponto?
- b) Determine os limites laterais quando $x = 1$,
o limite geral existe nesse ponto?

03. Analise os gráficos abaixo e determine se os limites gerais existem em torno de $x = 2$.



01. a) $\lim_{x \rightarrow 5^-} 4x - 3 = 4(4,999) - 3 = 17$
 $\lim_{x \rightarrow 5^+} 4x - 3 = 4(5,001) - 3 = 17$ } O limite existe

b) $\lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{|x + 6|}{x + 6} = \frac{|-6,001 + 6|}{-6,001 + 6} = -1$
 $\lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{|x + 6|}{x + 6} = \frac{|-5,999 + 6|}{-5,999 + 6} = +1$ } O limite NÃO existe

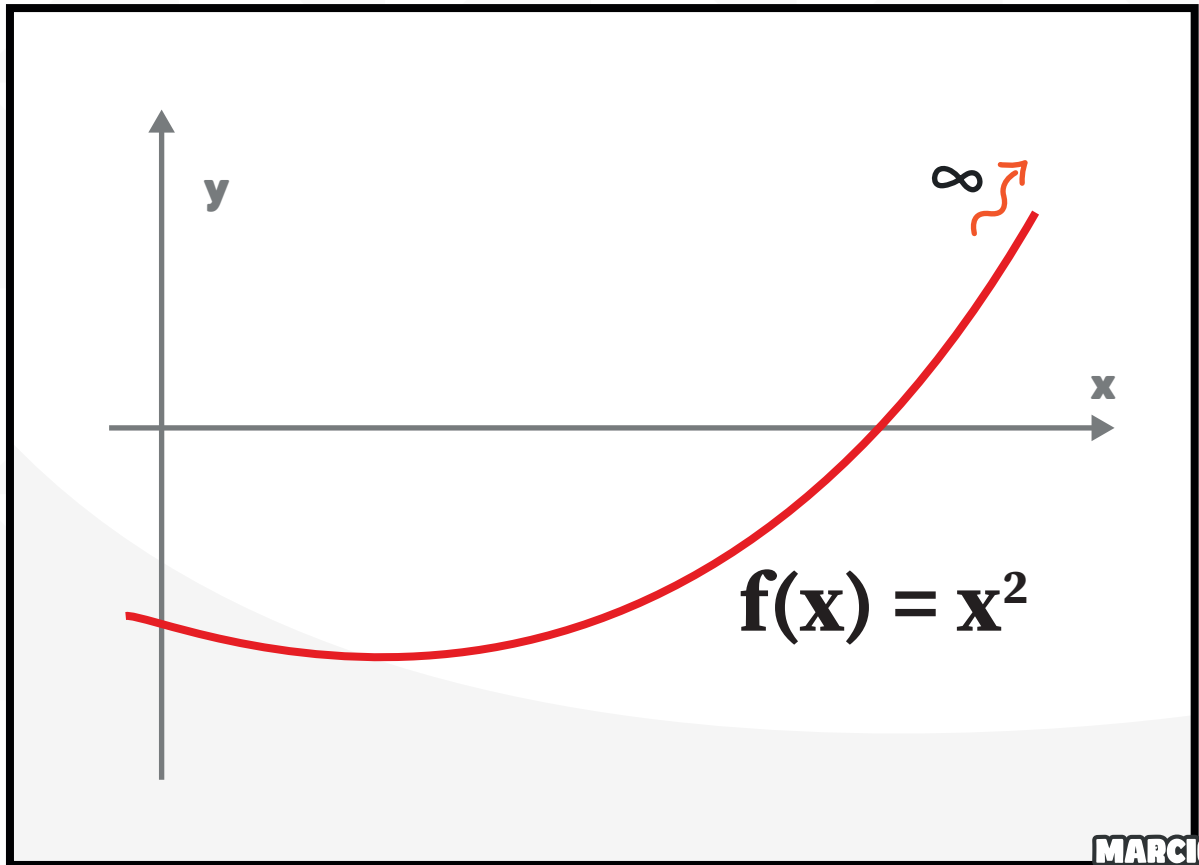
c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8 \cdot |2x|}{2x} = \frac{8 \cdot |-0,001|}{-0,001} = -8$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8 \cdot |2x|}{2x} = \frac{8 \cdot |0,001|}{0,001} = +8$ } O limite NÃO existe

02. a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} 5x = -5$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} 10 + 5x = +5$ } O limite NÃO existe

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} 10 + 5x = 15$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} 15x = 15$ } O limite existe

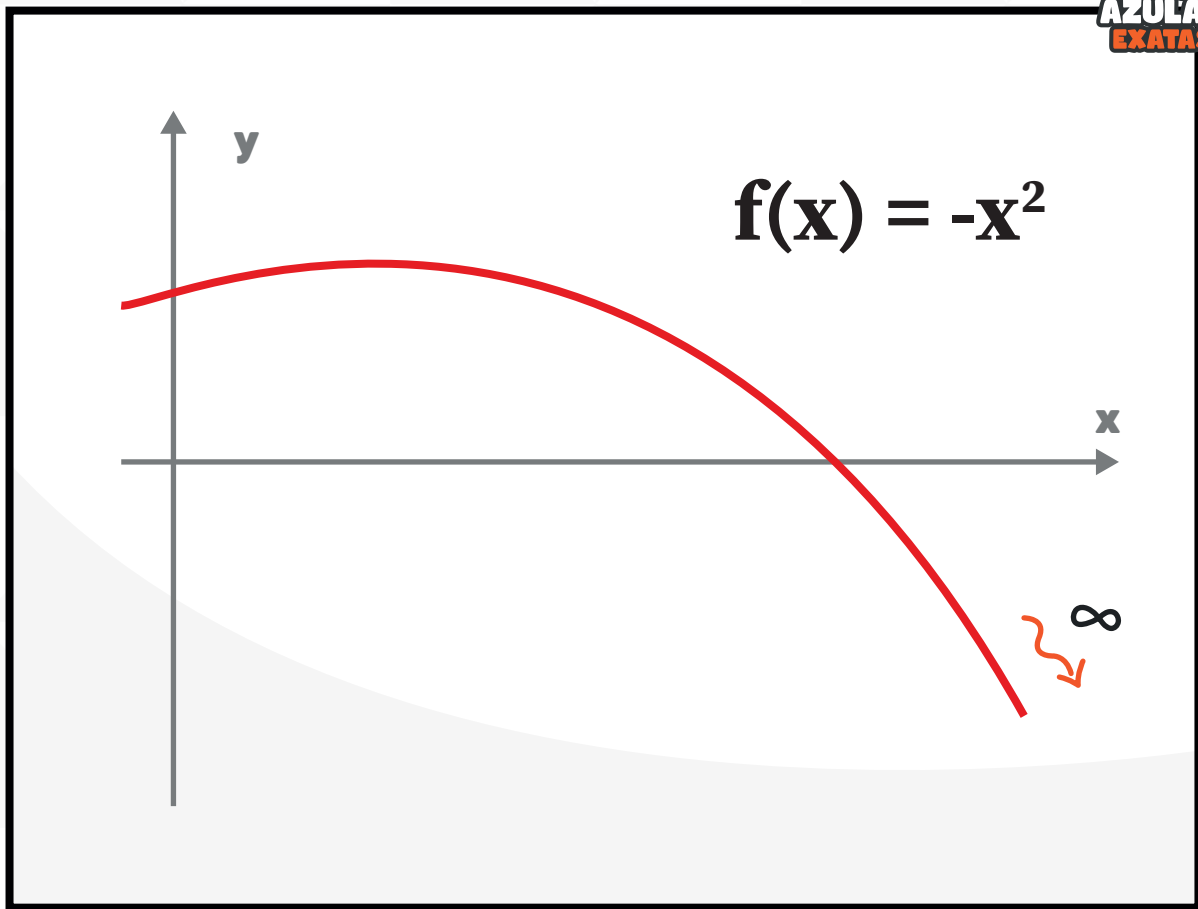
03. a) O limite existe
 b) O limite não existe (Se aproxima de infinito positivo pela esquerda e infinito negativo pela direita)
 c) O limite existe (Se aproxima do infinito positivo pela esquerda e pela direita)
 d) O limite existe, mesmo que a função adquira outro valor em $x = 2$

Limites Infinitos

**MARCIO
AZULAY
EXATAS**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$$

Em muitos casos, como a função quadrática ou a exponencial, tendem ao infinito quando "x" faz o mesmo

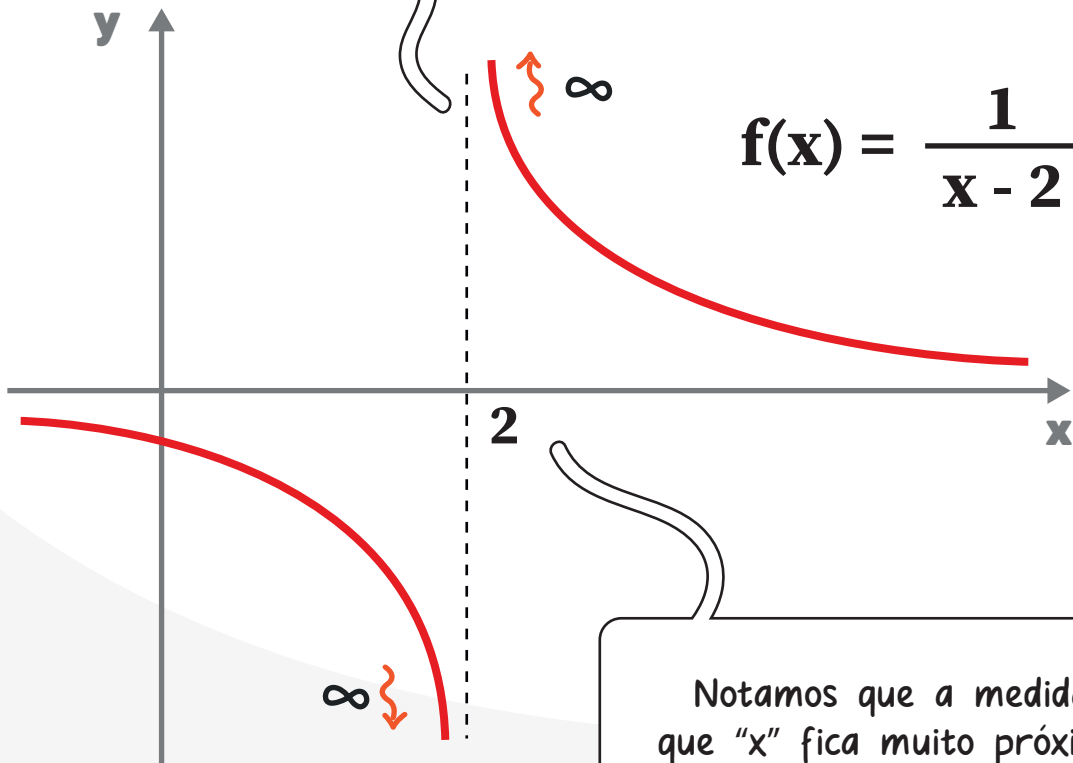


$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = -\infty$$

Ou fazer totalmente o inverso, que é o caso da função acima que decresce para o infinito negativo:

MARCIO
AZULAY
EXATAS

As assíntotas verticais
são muito comuns



Notamos que a medida
que "x" fica muito próximo
de "2", a função dispara
para os infinitos
positivo e negativo!

Não podemos
esquecer de checar
os limites laterais
esquerdo e direito, ok?

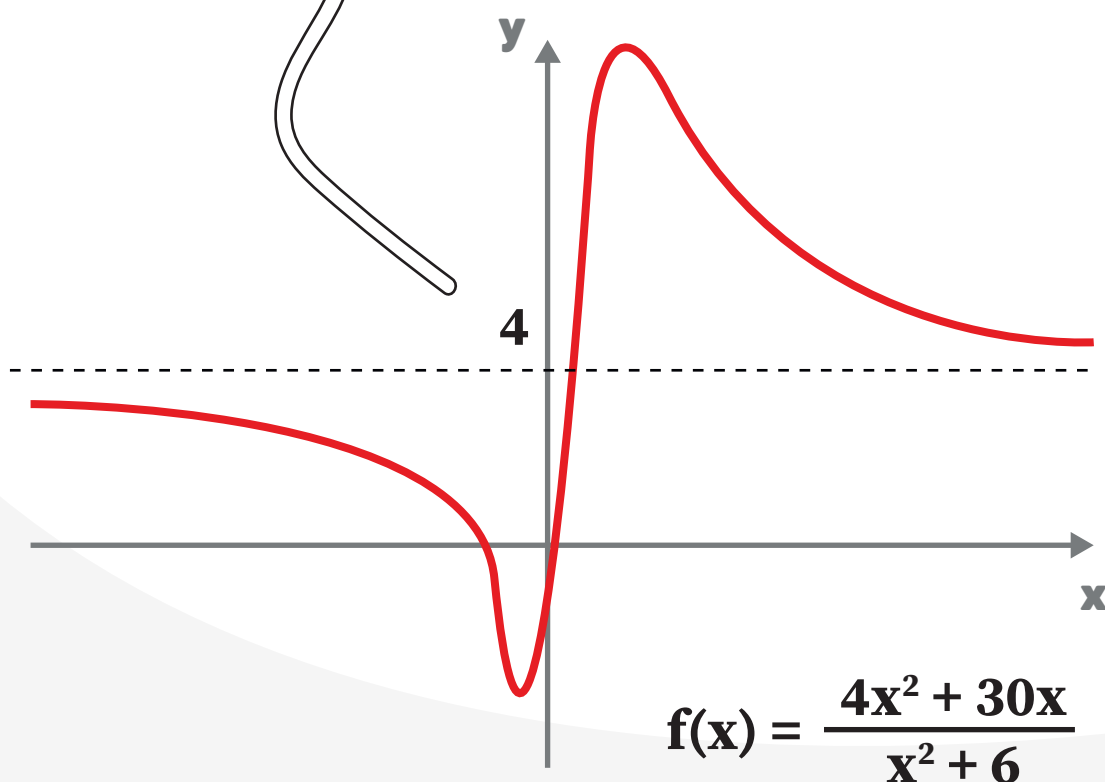
Nesse caso
de cima, o limite
geral nem existe...

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

Existem também os casos de assíntotas horizontais que é quando uma função tende a um valor específico, não importa o quão pequeno ou grande o valor de x seja

MARCIO
AZULAY
EXATAS



Perceba que a medida que x se aproxima do infinito, a função " y " se aproxima de "4"

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$$

O mesmo acontece quando x tende ao infinito negativo

Respondido

Determine os limites das funções a seguir:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x - 1000$

Solução

a) Faça a substituição direta, 4 multiplicado pelo infinito continua sendo infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x = 4(\infty) = \infty$$

b) Faça a substituição direta, teremos um infinito ao quadrado subtraído de outro infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x = (\infty)^2 - (\infty)$$

O primeiro infinito possui um crescimento ao quadrado, isso é muito maior que o crescimento do segundo termo, logo, a função ainda tende ao infinito

$$(\infty)^2 - (\infty) = \infty$$

c) Faça a substituição direta, cuidado com o jogo de sinal entre “-3” e o infinito negativo que substituímos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x - 1000 &= \\ -3(-\infty) - 1000 &= \\ +\infty - 1000 &= \\ \infty &= \end{aligned}$$

01. Encontre os limites das funções abaixo:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) - 5$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x - x$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{1000}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{10}}{x}$

Respondido

Determine os limites das funções a seguir:

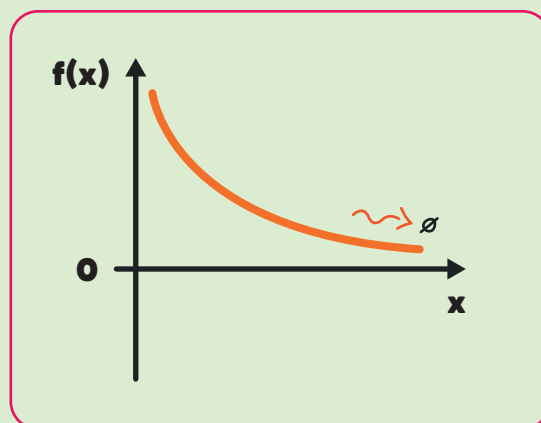
a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x}$

Solução

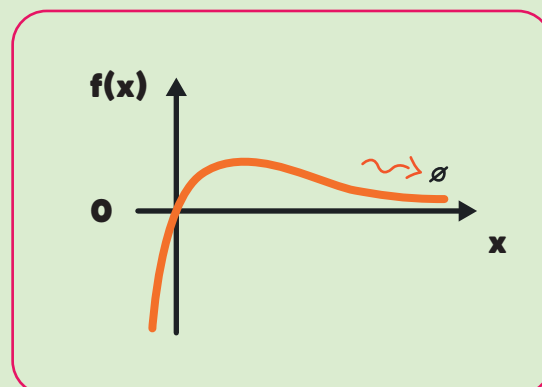
a) Faça a substituição direta e atenção a regra: a medida que um denominador cresce mais rápido que um numerador, a fração se aproxima de zero:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$



b) Faça a substituição direta, note que o denominador é 2 elevado ao infinito, expressão que cresce muito mais rápido que o seu numerador "x". A fração também se aproxima de zero:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x} = \frac{\infty}{2^{\infty}} = 0$$



02. Encontre os limites das funções abaixo:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^{999}}{2^x}$

Respondido

Determine o limite da função a seguir: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10}{x}$

Solução

Faça a substituição direta, mas se lembre dos limites laterais!

Atenção a regra: Quando o numerador da fração é relativamente maior que o seu denominador (que tende a zero), a fração tende ao infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{10}{x} = \frac{10}{0,000...} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10}{x} = \frac{10}{-0,000...} = -\infty$$

MARCIO
AZULAY
EXATAS

Os limites laterais são diferentes, logo, o limite geral não existe!

03. Encontre os limites laterais das funções abaixo, o limite geral existe?

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5}$

Respondido

Determine o limite da função a seguir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 9}{3x^2 - 3x + 10}$$

Solução

O maior termo do numerador e denominador são ambos elevados a 2, logo, o método de substituição direta não nos daria a resposta.

Tente dividir todos os termos por x^2 :

$$\frac{2x^2 + 5x - 9}{3x^2 - 3x + 10} \div x^2 = \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{10}{x^2}}$$

Simplifique o que puder:

$$\frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{10}{x^2}} = \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{9}{x^2}}{3 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}}$$

Podemos fazer a substituição pelo infinito, note que todas as frações que sobraram tendem a zero:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{9}{x^2}}{3 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} = \frac{2 + \frac{5}{\infty} - \frac{9}{\infty^2}}{3 - \frac{3}{\infty} - \frac{10}{\infty^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{3 - 0 - 0} = \frac{2}{3}$$

MARCIO
AZULAY
EXATAS

04. Encontre os limites das funções abaixo:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + x}{7x^3 - 1000}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{-2x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x + 9}$

01. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty^3 = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) - 5 = \infty - 5 = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x - x = \infty^{\uparrow} - \infty^{\uparrow} = \infty$

O primeiro termo cresce mais rapidamente que o segundo

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{1000} = \frac{-\infty}{1000} = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = -(-\infty)^3 = -(-\infty) = \infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{10}}{x} = x^9 = (-\infty)^9 = -\infty$

02. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+2} = \frac{2}{\infty} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x} = \frac{2}{\infty} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^{999}}{2^x} = \frac{10^{999}}{\infty} = 0$

03. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{+0,000...} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{-0,000...} = \infty$

} O limite NÃO existe

b) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{+0,000...} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{-0,000...} = -\infty$

} O limite NÃO existe

04.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + x}{7x^3 - 1000} = \frac{6 + \frac{1}{x^2}}{7 + \frac{1000}{x^3}} = \frac{6}{7}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{-2x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x + 9} = \frac{4}{-2} = -2$

